



СИММЕТРИК КЎПҲАДЛАР НАЗАРИЯСИНING ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКАДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Ҳамзаев Бахтиёр

Умаров Шокир

СамДУ қошидаги 1-сон академик лицейи ўқитувчилари

Таъриф. R – бутунлик соҳаси бўлсин. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг ҳар қандай алмаштиришида ўзгармайдиган $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ҳалқадан олинган $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад *симметрик кўпҳад* дейилади.

Аниқроқ айтсак, $S - S_n$ даги ўрин алмаштириш бўлиб, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳад учун

$$Sf(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{S(1)}, x_{S(2)}, \dots, x_{S(n)})$$

тенглик ўринли деб фараз қиламиз. Агар барча $S - S_n$ лар учун $Sf = f$ тенглик бажарилса f кўпҳад *симметрик* дейилади, .

Масалан, $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ҳалқанинг қуйидаги кўпҳадлари симметрик кўпҳадлардир:

$$1) f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \quad 2) g = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3;$$

$$3) h = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2.$$

$R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ҳалқадаги қуйидаги кўпҳадлар ҳам симметрик:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_n x_{n-1}$$

.....

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Бу мисолнинг асосий манбаси Виет теоремасидир.



$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ кўпхадлар элементар симметрик кўпхадлар деб аталади. **Теорема 1.** n ўзгарувчили $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ элементар симметрик кўпхадлар R да алгебраик боғланмагандир.

Исбот математик индукция усули ёрдамида олиб борилади ва қуйидаги леммага асосланади:

Лемма 1. $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ - нолмас, R устида энг кичик даражали кўпхад бўлиб, $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$ бўлсин. У ҳолда :

$$a) \quad f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_0(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) + f_1(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})y_n + \dots + f_k(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})y_n^k,$$

$$\text{бу ерда } f_0(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

$$б) \quad f_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) + f_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_n + \dots + f_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_n^k = 0;$$

$$в) \quad x_n = 0 \quad \text{да} \quad f_0(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}) = 0 \quad \text{га эга бўламиз, бу ерда } \tilde{\sigma}_i = \sigma_i - 1$$

ўзгарувчили элементар симметрик кўпхадлар;

э) агар n ўзгарувчили элементар симметрик кўпхадлар алгебраик боғланган бўлса, у ҳолда $n-1$ ўзгарувчили элементар симметрик кўпхадлар алгебраик боғланган бўлади.

Қуйидаги теорема симметрик кўпхадлар ҳақидаги асосий теоремадир.

Теорема. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрик кўпхад R устида коэффициентлари R да бўлган $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ кўпхад кўринишида ифодаланади. Бундай ифода бир қийматлидир.

Теоремани биринчи қисмининг исботи 2-леммага асосланади. Иккинчи қисмининг исботи эса 1-лемма дан келиб чиқади.

2-Лемма. $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_k^{k_k}$ — симметрик $b(x_1, \dots, x_n)$ кўпхаднинг бош ҳади бўлсин. У ҳолда:

$$1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ кўпхад } ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} \text{ хадни ўзида сақлайди;}$$



$$2) \quad k_1 \quad k_2; \quad 3) \quad k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n;$$

$$4) \quad h(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \sigma_1^{k_2-k_1} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n} \quad \text{кўпхад мавжуд бўлади};$$

$$5) \quad f \quad \text{ва} \quad h \quad \text{кўпхадларнинг бош ҳадлари тенг};$$

$$6) \quad f_1 = f - h \quad \text{кўпхад симметрик; унинг бош ҳади} \quad f \quad \text{кўпхаднинг бош ҳадидан кичик};$$

$$7)$$

$$f_1 = f - h;$$

$$f_2 = f_1 - h_1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_{s-1} = f_{s-2} - h_{s-2};$$

$$f_s = f_{s-1} - h_{s-1}$$

$$\text{кўпхадларни куриш жараёни чекли:} \quad \text{қандайдир} \quad S \quad \text{да} \quad f_s = 0;$$

$$8) \quad f = h + h_1 + h_2 + \dots + h_{s-1}.$$

Бу исбот конструктив характерга эга. Уни аниқмас коэффициентла усули билан тўлдирсак, у симметрик кўпхадларни элементар кўпхадлар орқали ифодалашнинг амалий усулини беради.

Олинган натижалар ўзгарувчилар симметрик ҳолда кирган тенгламалар системаларини ечишга ёрдам беради. Иккита мисол келтирамиз. Эслатиб ўтамизки, бу ерда ва кейинчалик фақатгина ҳақиқий ечимларни излаймиз.

Мисол 1. Қуйидаги системани қараймиз:

$$(x - y) (x^2 - y^2) = 16,$$

$$(x + y) (x^2 + y^2) = 20.$$

$$x + y = \sigma_1, \quad xy = \sigma_2 \quad \text{деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:}$$

$$1) \quad \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 = 16; \quad 2) \quad \sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 3;$$

$$\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = 40.$$

$$3) \quad x_1 = 1, y_1 = 3; \quad x_2 = 3, y_2 = 1$$



Мисол 2. Қуйидаги системани қараймиз:

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8}$$

$$xy + xz + yz = x + y + z$$

$$xyz = 1$$

$x + y + z = \sigma_1$, $xy + xz + yz = \sigma_2$, $xyz = \sigma_3$ деб олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$1) \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{73}{8}, \quad 2) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{7}{2}, \quad \sigma_3 = 1;$$

$$\sigma_2 = \sigma_1,$$

$$\sigma_3 = 1;$$

$$3) \quad x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1, y_2 = \frac{1}{2}, z_2 = 2;$$

$$x_3 = 2, y_3 = 1, z_3 = \frac{1}{2}; x_4 = 2, y_4 = \frac{1}{2}, z_4 = 1;$$

$$x_5 = \frac{1}{2}, y_5 = 1, z_5 = 2; x_6 = \frac{1}{2}, y_6 = 2, z_6 = 1.$$

Симметрик кўпхадлар махражни иррационалликдан озод этишда қўлланилади. Назарияга тўхталмасдан бу баъзи хусусий ҳолларда қандай бажарилишини кўрсатамиз.

Мисол 3. $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ ифодани қараймиз. $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$,

$z = \sqrt[3]{c}$ деб оламиз. $\sigma_k - x, y, z$ ўзгарувчили симметрик кўпхад

бўлсин, $S = x^3 + y^3 + z^3$.

Қуйидагиларга эга бўламиз:



$$\begin{aligned}
 1) \quad S_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \quad \text{ва} \quad S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2); \\
 2) \quad \frac{1}{\sigma_1} &= \frac{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}{S_3 - 3\sigma_3} = \frac{(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)(S_3^2 + 3S_3\sigma_3 + 9\sigma_3^2)}{(S_3 - 3\sigma_2)(S_3^2 + 3S_3\sigma_3 + 9\sigma_3^2)}; \\
 3) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} &= \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})}{\frac{(a+b+c)^3 + 3(a+b+c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{(a+b+c)^3 - 27abc}}.
 \end{aligned}$$

АДАБИЁТЛАР

1. Искандаров Р.И. Назаров А. Алгебра ва сонлар назарияси. 1,2 қисм. Тошкент. Ўқитувчи. 1977 йил.
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент. Ўқитувчи. 1972 йил.